

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim
Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

Ein anschauungsorientiertes Konzept zum Unterrichten von Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und Anna Schill

Pädagogische Hochschule Karlsruhe

13. November 2009

Gliederung

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

- 1 Probleme beim Bruchrechnen
 - Typische Probleme beim Bruchrechnen
 - Warum gibt es diese Probleme?
- 2 Grundvorstellungen
- 3 Das Konzept
 - Merkmale des Konzepts
 - Die Phasen im Detail

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim
Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

*Und merk dir ein für allemal
den wichtigsten von allen Sprüchen:
Es liegt dir kein Geheimnis in der Zahl,
allein ein großes in den Brüchen.*

J.W. VON GOETHE

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim
Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

Das Rechnen mit Brüchen ist für Schüler eine Plage, und auch die Lehrer sind nicht zufrieden, wenn sie an den trotz aller Mühe oft nur geringen Erfolg auf diesem Gebiet denken.

SCHÖNWALD 1955

Untersuchungen belegen mangelnde Erfolge

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim
Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

- 900 Realschüler lösen nur knapp 70% Additionsaufgaben mit ungleichnamigen Brüchen richtig (Padberg 1989).
- 10% von einer Gruppe untersuchter Gymnasiasten lösen Aufgaben zur Division "Bruch durch natürliche Zahl" so

$$\frac{a}{b} : c = \frac{ac}{b} \quad (\text{Padberg 1991})$$

- Erfolgsquoten mehrerer Untersuchungen von Padberg zur Division von Brüchen über alle Schularten liegen nur bei ca. 50 %.
-

Typische Probleme bei der Bruchrechnung

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim
Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

- Es fehlen Grundvorstellungen,
- Formeln werden verwechselt,
- Bruchrechnen wird als ein abstraktes Kalkül empfunden, ohne Bezug zur Realität.

Warum gibt es diese Probleme?

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

- Die Inhalte der Bruchrechnung sind komplex (etwa: Bruch besteht aus zwei Zahlen),
- Der Aufbau von Grundvorstellungen ist schwierig (z.T. Widerspruch zu bestehenden Grundvorstellungen),
- Viele verwirrende Regeln.

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim
Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

Bildungspläne fordern

- *Die Anwendung von Mathematik in vielen verschiedenen Situationen ist wichtiger Bestandteil mathematischer Grundbildung.*

Bildungsplan BaWü, Hauptschule 2004

- *Die Intention mathematischer Standards ist es, Schülerinnen und Schüler zu befähigen, mathematische Kompetenzen zu benutzen, um in einer sich verändernden Welt Probleme lösen zu können.*

Bildungsplan BaWü, Realschule 2004

- *Verstandene Mathematik ist wichtiger als die Beherrschung großer Stoffmengen.*

Bildungsplan BaWü, Hauptschule 2004

Grundvorstellungen

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

Ohne Grundvorstellungen ist Bruchrechnung im Alltag nicht anwendbar. Regelwissen ist dann sinnlos.

Inhalte der Bruchrechnung

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

I. Was bedeutet eine Bruchzahl? Bruch als

- Teil (eines Ganzen)
- relativer Anteil
- Vergleichsoperator
- Resultat einer Division
- Verhältnis
- Quasikardinalzahl
- Quasiordinalzahl
- absoluter Anteil

Inhalte der Bruchrechnung

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

Versuch einer Zusammenfassung Bruch als

- 1 Teil (eines Ganzen), Quasikardinalzahl
- 2 relativer Anteil, Vergleichsoperator, Quasiordinalzahl
- 3 Verhältnis, absoluter Anteil

weggelassen:

Bruch als Resultat einer Division

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

II. Rechnen mit Brüchen

- Erweitern (Verfeinern) und Kürzen (Vergröbern)
- Addieren (Subtr.) als Zusammenfügen (Wegnehmen)
- Multiplikation als abgekürzte Addition
- "von" Deutung der Multiplikation
- Dividieren als Verteilen
- Dividieren als Aufteilen

Merkmale des Konzepts

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim
Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

- solange wie möglich anschaulich (durch Material & Sachrechnen)
- drei Phasen
- in jeder Phase fast alle Inhalte
d.h.: die meisten Inhalte kommen 3 mal dran

Die Phasen

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim
Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

1. enaktiv-ikonische Phase

Arbeiten am Material aber bereits
symbolische Notation,
geänderte Schreibweise
Brüche als Quasikardinalzahl: *2 Drittel*
Brüche meist als Teil eines Ganzen,
einfache Operatoren,
nur einfache Nenner
rein intuitives Arbeiten, ohne Regeln.

Die Phasen

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim
Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

2. Phase der operativen Behandlung
Ausdehnen auf (fast) beliebige Nenner,
Brüche verstärkt als Operatoren,
Übergang zur Standardschreibweise,
Nicht mehr alles am Material erarbeitbar,
Vorstellungen werden im Kopf erzeugt
Intuitives Annähern an Regelmäßigkeiten.

Die Phasen

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim
Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

3. symbolische Phase

Auch Multiplikation und Division von Brüchen
formale, kompliziertere Rechnungen
Formulieren von Regeln für alle

Merkmale

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

nicht neu sind:

- Veranschaulichungen
- Inhalte
(Dezimalbrüche nicht Teil des Konzepts)

Aufteilung

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

bisher:

”Was ist ein Bruch?” in Klasse 5

Operationen in Klasse 6

Vorschlag:

Phase 1: Klasse 5 (oder Klasse 4)

Phase 2: Klasse 6 (oder Klasse 5)

Phase 3: Klasse 7 (oder Klasse 6)

Phasen im Detail

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

1. enaktiv-ikonische Phase

- Material basteln
- Legen von Aufgaben

Phasen im Detail

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim
Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

1. enaktiv-ikonische Phase

- *2 Sechstel + 3 Sechstel = 5 Sechstel*
- *9 Zwölftel – 4 Zwölftel = 5 Zwölftel*
- *2 · 3 Achtel = 6 Achtel*
- *1 Ganzes : 4 = 1 Viertel*
- *4 Achtel = 1 Halbes*
- *Setze < oder > ein:
3 Viertel \square 1 Drittel*
- *1 Viertel von 24 Kindern*

Phasen im Detail

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

2. Phase der operativen Behandlung

- Aufbau von Vorstellungen hinter den symbolischen Zeichen
- Zunehmender Verzicht auf Material
- Übergang zur Standard Bruchschreibweise

Phasen im Detail

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

2. Phase der operativen Behandlung

Division: Tim gießt 2 Liter Saft in Viertel-Liter-Gläser.

Wie viele Gläser kann er füllen?

Wie viele Strecken der Länge $\frac{1}{4}$ m
passen in 2 m?

Phasen im Detail

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim
Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

2. Phase der operativen Behandlung

- *31 Drittel =*
- *In der Klasse 6c sind 24 Schüler. 2 Drittel der Klasse sind Jungen.*
- *Welcher Bruch ist hier dargestellt? Unterteile in kleinere Bruchteile und benenne wieder.*
- *Kürze 15 Zwölftel so weit wie möglich.*
- *1 Halbes + 3 Viertel =*
- *20 Vierzigstel + 1 Halbes =*
- *5 · 3 Achtzehntel =*
- *4 : 1 Achtel =*
- *Die Klasse 6b hat Kunstunterricht. Der Unterricht dauert 3 viertel Stunden. 2 Drittel der Zeit malen die Schüler ein Bild.*

Phasen im Detail

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

3. symbolische Phase

- zunehmend mit dem Schulbuch arbeiten
- Addition und Subtraktion mit teilerfremden Nennern
- Bruch mal natürliche Zahl durch:

Im Kino wiegt eine Portion Popcorn 60g.

- a. Klaus nimmt 4 Portionen. Wie viel g sind das?
- b. Leo nimmt $1/4$ Portion. Wie viel g sind das?

Phasen im Detail

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

3. symbolische Phase

- zunehmend Gespräche über Strategien beim Bruchrechnen
- formulieren im Forschungsheft individuell

Bruchrechnenkonzept

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim
Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

rosebrock@ph-karlsruhe.de
schill@ph-karlsruhe.de

www.rosebrock.ph-karlsruhe.de

Bruchrechenkonzept

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim
Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail



Stephan Rosebrock und Anna Schill.

Ein anschauungsorientiertes Konzept zum Unterrichten von Bruchrechnen,
Gestalt-Theory 27 (4), (2005); S. 291 – 306.



Stephan Rosebrock und Anna Schill.

Tragfähige Bruchvorstellungen I & II,
Kreative Ideenbörse Mathematik, Hrsg. H. Köhler, Olzog-Verlag (2005); S. 1 - 24.
Kreative Ideenbörse Mathematik; Hrsg. H. Köhler, Olzog-Verlag (2006); S. 1 - 23.



G. Malle. *Grundvorstellungen zu Bruchzahlen.*
mathematik lehren 123 (2004).



H. Winter.

*Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht,
dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung.*
Preprint, Aachen, [http://blk.mat.uni-bayreuth.de/
material/db/37/bruchrechnung.pdf](http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/37/bruchrechnung.pdf)

Bruchrechnenkonzept

Bruchrechnen

Stephan Rosebrock und
Anna Schill

Probleme beim Bruchrechnen

Probleme beim Bruchrechnen
Warum gibt es diese Probleme?

Grundvorstellungen

Das Konzept

Merkmale des Konzepts
Die Phasen im Detail

Workshops

1. Fragen in Kleingruppen diskutieren

Inwieweit sehen Sie das Konzept als nützlich für Ihre Schulart an?

Wie würden Sie das Konzept modifizieren, damit es für Sie sinnvoll ist?

Was fehlt Ihnen an dem Konzept?

2. Im Plenum Einzelnes vorstellen.